ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

TRẦN HUYỀN THƯƠNG

BẤT ĐẲNG THỨC SẮP XẾP LẠI VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG

THÁI NGUYÊN - 2018

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC

———————o0o———————

TRẦN HUYỀN THƯƠNG

BẤT ĐẲNG THỨC SẮP XẾP LẠI VÀ MỘT SỐ ỨNG DỤNG

Chuyên ngành: PHƯƠNG PHÁP TOÁN SƠ CẤP
Mã số: 84. 60. 113

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC
PGS.TS. TRỊNH THANH HẢI

THÁI NGUYÊN - 2018

Mục lục

Lời nói đầu

Bất đẳng thức sắp xếp lại (hay còn gọi là bất đẳng thức hoán vị) là một bất đẳng thức sơ cấp rất mạnh. Sử dụng bất đẳng thức sắp xếp lại sẽ cho ta những lời giải bất đẳng thức thú vị. Trên tạp chí toán quốc tế Mathematical Excalibur (Vol. 4, No. 3, tháng 3/1999), Kin Yin Li (công tác tại Khoa Toán Đại học Khoa học và Công nghệ Hồng Kông) đã viết một bài báo với tiêu đề "Rearrangement Inequality" nhằm giới thiệu bất đẳng thức này, từ đó có nhiều tác giả trong và ngoài nước đã quan tâm, trao đổi về bất đẳng thức sắp xếp lại. Với mong muốn làm rõ cơ sở toán học, ý tưởng của việc sử dụng bất đẳng thức sắp xếp lại để chứng minh bất đẳng thức, tôi chọn hướng nghiên cứu sử dụng bất đẳng thức sắp xếp lại trong việc đưa ra lời giải cho một số bất đẳng thức trong các đề thi học sinh giỏi quốc gia và quốc tế làm hướng nghiên cứu của luận văn thạc sĩ với tên đề tài "Bất đẳng thức sắp xếp lại và một số ứng dụng".

Ngoài phần mở đầu, kết luận và tài liệu tham khảo, nội dung của luận văn được trình bày trong 2 chương:

Chương 1. Kiến thức chuẩn bị. Trong chương này sẽ trình bày định nghĩa, tính chất cơ bản của bất đẳng thức và liệt kê một vài hướng giải bài toán về bất đẳng thức thường gặp trong chương trình toán phổ thông và đề thi chọn học sinh giỏi.

Chương 2. Bất đẳng thức sắp xếp lại và một số ứng dụng. Nội dung Chương 2 trình bày bất đẳng thức sắp xếp lại và ý tưởng của việc vận dụng bất đẳng thức sắp xếp lại vào việc giải một số các bài toán liên quan đến bất đẳng thức, trình bày cụ thể một số ví dụ minh họa cho việc vận dụng bất đẳng thức sắp xếp lại vào việc chứng minh một số bất đẳng thức quen thuộc trong chương trình phổ thông.

Cuối chương này tôi sưu tầm, chọn lọc đưa ra một số bài toán trong các kỳ thi học sinh giỏi có liên quan đến bất đẳng thức sắp xếp lại.

Luận văn được hoàn thành tại trường Đại học Khoa học, Đại học Thái Nguyên. Lời đầu tiên tác giả xin được bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy giáo PGS. TS. Trịnh Thanh Hải. Thầy đã dành nhiều thời gian hướng dẫn cũng như giải đáp các thắc mắc của tôi trong suốt quá trình làm luận văn. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy.

Em xin chân thành cảm ơn toàn thể các thầy cô trong Khoa Toán - Tin, trường Đại học Khoa học - Đại học Thái Nguyên đã tận tình hướng dẫn, truyền đạt kiến thức trong suốt thời gian theo học, thực hiện và hoàn thành luận văn.

Luận văn đã được tác giả đầu tư nghiên cứu dưới sự hướng dẫn của PGS.TS. Trịnh Thanh Hải nhưng do nhiều lí do, luận văn sẽ còn những thiếu sót nhất định. Em hy vọng sẽ nhận được nhiều đóng góp của các quý Thầy cô, các anh chị em đồng nghiệp để luận văn hoàn chỉnh hơn.

Thái Nguyên, tháng 5 năm 2018

Tác giả luận văn

Trần Huyền Thương

Chương 1. Kiến thức chuẩn bị

Chương này trình bày một số kiến thức về một số kết quả lý thuyết về bất đẳng thức, những kết quả này là những kiến thức bổ trợ cho việc trình bày các kết quả chính trong chương 2. Nội dung của chương được tổng hợp từ các tài liệu [1] và [2].

1.1 Định nghĩa và một số tính chất của bất đẳng thức

Trong toán học, một bất đẳng thức là một phát biểu về quan hệ thứ tự giữa hai đối tượng.

Ký hiệu $a < b$ có nghĩa là a **nhỏ hơn** b và ký hiệu $a > b$ có nghĩa là a **lớn hơn** b. Những quan hệ nói trên được gọi là **bất đẳng thức nghiêm ngặt**; ngoài ra ta còn có các bất đẳng thức không ngặt:

$a \leq b$ có nghĩa là a **nhỏ hơn hoặc bằng** b và;

$a \geq b$ có nghĩa là a **lớn hơn hoặc bằng** b.

Sau đây là một số tính chất quen thuộc của bất đẳng thức thường dùng.

Tính chất 1.1.1 (Tính chất bắc cầu) *Nếu* $a > b$ *và* $b > c$ *thì* $a > c$.

Tính chất 1.1.2 $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$.

Hệ quả 1.1.3 $a > b \Leftrightarrow a - c > b - c$.

Hệ quả 1.1.4 $a + c > b \Leftrightarrow a > b - c$.

Tính chất 1.1.5 $a > b$ *và* $c > d \Rightarrow a + c > b + d$.

Tính chất 1.1.6 $\begin{cases} c > 0 : a > b \Leftrightarrow ac > bc, \\ c < 0 : a > b \Leftrightarrow ac < bc. \end{cases}$

Tính chất 1.1.7 $a > b \Leftrightarrow -a < -b.$

Tính chất 1.1.8 $\begin{cases} c > 0 : a > b \Leftrightarrow \dfrac{a}{c} > \dfrac{b}{c}; \\ c < 0 : a > b \Leftrightarrow \dfrac{a}{c} < \dfrac{b}{c}. \end{cases}$

Tính chất 1.1.9 $\begin{cases} a > b > 0 \\ c > d > 0 \end{cases} \Rightarrow ac > bd.$

Tính chất 1.1.10 $a > b > 0 \Leftrightarrow 0 < \dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}.$

Tính chất 1.1.11 $a > b > 0,\ n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow a^n > b^n.$

Tính chất 1.1.12 $a > b > 0,\ n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}.$

Hệ quả 1.1.13 (i) *Nếu* a *và* b *là hai số dương thì* $a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2.$

(ii) *Nếu* a *và* b *là hai số không âm thì* $a \geq b \Leftrightarrow a^2 \geq b^2.$

Tính chất 1.1.14 *Với mọi* $a,\ b \in \mathbb{R}$ *ta có:*

(i) $|a + b| \leq |a| + |b|.$

(ii) $|a - b| \leq |a| + |b|.$

(iii) $|a + b| = |a| + |b| \Leftrightarrow a.b \geq 0.$

(iv) $|a - b| = |a| + |b| \Leftrightarrow a.b \leq 0.$

1.2 Một số phương pháp giải bài toán bất đẳng thức thường gặp ở phổ thông

Trong chương trình phổ thông, học sinh đã được tiếp cận với một số hướng để giải các bài toán về bất đẳng thức như:

- Định nghĩa;

- Phép biến đổi tương đương;

- Một số bất đẳng thức kinh điển, chẳng hạn bất đẳng thức Cauchy, Bunhiacopski, Chebyshev, Bernouli;

- Tính chất bắc cầu;

- Tính chất của tỉ số;

- Làm trội;

- Bất đẳng thức trong tam giác;

- Tam thức bậc hai;

- Quy nạp toán học;

- Chứng minh phản chứng;

- Biến đổi lượng giác;

- Khai triển nhị thức Newton;

- Tích phân...

Sau đây là một số ví dụ minh họa.

Ví dụ 1.2.1 Chứng minh rằng với mọi m, n, p, q ta đều có:

$$m^2 + n^2 + p^2 + q^2 + 1 \geq m(n + p + q + 1).$$

Chứng minh: Đối với ví dụ này ta sử dụng phương pháp biến đổi tương đương như sau.

$$\begin{aligned}
& m^2 + n^2 + p^2 + q^2 + 1 \geq m(n + p + q + 1) \\
& \Leftrightarrow \left(\frac{m^2}{4} - mn + n^2\right) + \left(\frac{m^2}{4} - mp + p^2\right) \\
& \qquad + \left(\frac{m^2}{4} - mq + q^2\right) + \left(\frac{m^2}{4} - m + 1\right) \geq 0 \\
& \Leftrightarrow \left(\frac{m}{2} - n\right)^2 + \left(\frac{m}{2} - p\right)^2 + \left(\frac{m}{2} - q\right)^2 + \left(\frac{m}{2} - 1\right)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Ta thấy bất đẳng thức cuối cùng hiển nhiên đúng.

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} \dfrac{m}{2} - n = 0 \\ \\ \dfrac{m}{2} - p = 0 \\ \\ \dfrac{m}{2} - q = 0 \\ \\ \dfrac{m}{2} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n = \dfrac{m}{2} \\ \\ p = \dfrac{m}{2} \\ \\ q = \dfrac{m}{2} \\ \\ m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ n = p = q = 1 \end{cases}$.

Ví dụ 1.2.2 Cho $xy \geq 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy}.$$

Chứng minh: Đối với ví dụ này ta sử dụng phương pháp biến đổi tương đương như sau:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+y^2} \geq \frac{2}{1+xy} \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+xy}\right) + \left(\frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{1+xy}\right) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{xy - x^2}{(1+x^2)(1+xy)} + \frac{xy - y^2}{(1+y^2)(1+xy)} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{x(y-x)}{(1+x^2)(1+xy)} + \frac{y(x-y)}{(1+y^2)(1+xy)} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{(y-x)^2(xy-1)}{(1+x^2)(1+y^2)(1+xy)} \geq 0.
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối này đúng do $xy \geq 1$.

□

Ví dụ 1.2.3 Chứng minh rằng:

$$(a^{10} + b^{10})(a^2 + b^2) \geq (a^8 + b^8)(a^4 + b^4).$$

Chứng minh: Đối với ví dụ này ta sử dụng phương pháp biến đổi tương đương như sau:

$$\begin{aligned}
&(a^{10}+b^{10})(a^2+b^2) \geq (a^8+b^8)(a^4+b^4)\\
&\Leftrightarrow a^{12}+a^{10}b^2+a^2b^{10}+b^{12} \geq a^{12}+a^8b^4+a^4b^8+b^{12}\\
&\Leftrightarrow a^8b^2(a^2-b^2)+a^2b^8(b^2-a^2) \geq 0\\
&\Leftrightarrow a^2b^2(a^2-b^2)(a^6-b^6) \geq 0\\
&\Leftrightarrow a^2b^2(a^2-b^2)^2(a^4+a^2b^2+b^4) \geq 0.
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức cuối đúng.

□

Ví dụ 1.2.4 Cho a, b, c là số đo ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c} \geq 3. \tag{1.1}$$

Chứng minh: Theo bất đẳng thức Cauchy:

$$\frac{a}{b+c-a}+\frac{b}{c+a-b}+\frac{c}{a+b-c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{abc}{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}}. \tag{1.2}$$

Cũng theo bất đẳng thức Cauchy:

$$\sqrt{(b+c-a)(c+a-b)} \leq \frac{1}{2}(b+c-a+c+a-b) = c. \tag{1.3}$$

Viết tiếp hai bất đẳng thức tương tự (1.3) rồi nhân với nhau sẽ được

$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leq abc.$$

Suy ra

$$\frac{abc}{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)} \geq 1. \tag{1.4}$$

Từ (1.2), (1.4) suy ra (1.1). Dấu "=" xảy ra khi $a=b=c$ hay tam giác là tam giác đều.

□

Ví dụ 1.2.5 Cho $3 \leq n \in \mathbb{Z}$. Chứng minh rằng

$$n^{n+1} > (n+1)^n.$$